UNIVERSITE ALIOUNE DIOP DE BAMBEY
UFR SATIC
DEPT. DE PHYSIQUE

EXAMEN DE MECANIQUE QUANTIQUE 2022-2023 - SESSION RATTRAPAGE

EXAMINATEURS : Prof. S. MBODJI, Dr. B. T. FANKAM, Dr. S. N. LEYE & Dr. A. DIOUF

NIVEAU : **L2**

Exercice 1 (9pts)

1. Déterminons en considérant l'analyse einsteinienne en fonction du facteur relativiste, γ et de la longueur d'onde Compton, λ_C, l'expression de la longueur d'onde de Broglie, λ_{DB}

D'après Louis De Broglie, on a : $\boxed{\lambda_{DB} = \frac{h}{p}}$ **(1pt)**

D'après l'analyse einsteinienne : $\boxed{\begin{cases} E^2 = p^2c^2 + \left(m_0c^2\right)^2 \\ E = E_k + m_0c^2 \end{cases}}$ **(1pt+1pt)**

p : quantité de mouvement de l'électron ;

E : énergie totale d'un électron ;

E_k : énergie cinétique d'un électron ;

m_0 : masse au repos de l'électron ;

c : célérité de la lumière dans le vide

$$E^2 = p^2c^2 + \left(m_0c^2\right)^2 \quad \Rightarrow \quad p^2c^2 = E^2 - \left(m_0c^2\right)^2 \quad \Rightarrow \quad p = \frac{\sqrt{E^2 - \left(m_0c^2\right)^2}}{c}$$

$$\Rightarrow \lambda_{DB} = \frac{hc}{\sqrt{E^2 - \left(m_0c^2\right)^2}} \quad \Rightarrow \quad \lambda_{DB} = \frac{hc}{\sqrt{\left(m_0c^2\right)^2\left[\left(\frac{E}{m_0c^2}\right)^2 - 1\right]}}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_{DB} = \frac{h/m_0c}{\sqrt{\left[\left(\frac{E}{m_0c^2}\right)^2 - 1\right]}}$$

On sait que $\gamma = \frac{E}{m_0c^2} = \frac{E}{E_0} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$;

Avec : $E_0 = m_0c^2$: énergie au repos de l'électron.

$$\Rightarrow \lambda_{DB} = \frac{h/m_0c}{\sqrt{\gamma^2-1}} = \frac{\lambda_C}{\sqrt{\gamma^2-1}} \ ; \ \lambda_C = \frac{h}{m_0c} \Rightarrow \boxed{\lambda_{DB} = \frac{\lambda_C}{\sqrt{\gamma^2-1}}}$$ **(1pt)**

2. Calculons l'énergie cinétique E_k des électrons en utilisant la conservation de l'énergie mécanique

D'après l'utilisation de la conservation de l'énergie mécanique, on a :

$$\boxed{E_{c_i} + E_{p_i} = E_{c_f} + E_{p_f}}$$ **(1pt)**

$\Rightarrow E_{c_i} = 0$; $E_{p_i} = (-e)(-V_a)$; $E_{c_f} = E_k$ et $E_{p_f} = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 + (-e)(-V_a) = E_k + 0$

$\Rightarrow \boxed{E_k = eV_a}$ **(1pt)**

3. Complétons le tableau ci-dessous pour plusieurs valeurs de la tension d'accélération V_a

Nous savons que : $\lambda_{DB} = \frac{\lambda_C}{\sqrt{\gamma^2-1}}$

$$\boxed{\gamma = \frac{E}{E_0} = \frac{E_k + E_0}{E_0} = \frac{E_k}{E_0} + 1}$$ **(1pt)**

$$\Rightarrow \gamma = \frac{eV_a}{m_0c^2} + 1 \quad \Rightarrow \quad \gamma^2 = \left(\frac{eV_a}{m_0c^2}\right)^2 + 2\left(\frac{eV_a}{m_0c^2}\right) + 1$$

$$\Rightarrow \gamma^2 - 1 = \left(\frac{eV_a}{m_0c^2}\right)^2 + 2\left(\frac{eV_a}{m_0c^2}\right) \quad \Rightarrow \lambda_{DB} = \frac{\lambda_C}{\sqrt{\left(\frac{eV_a}{m_0c^2}\right)^2 + 2\left(\frac{eV_a}{m_0c^2}\right)}} \ ; \ \lambda_C = \frac{h}{m_0c}$$

$$\Rightarrow \lambda_{DB} = \frac{\frac{h}{m_0c}}{\sqrt{\left(\frac{eV_a}{m_0c^2}\right)^2 \left[1 + 2\left(\frac{m_0c^2}{eV_a}\right)\right]}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_{DB} = \frac{hc}{eV_a\sqrt{1+2\left(\frac{m_0c^2}{eV_a}\right)}}}$$ **(1pt)**

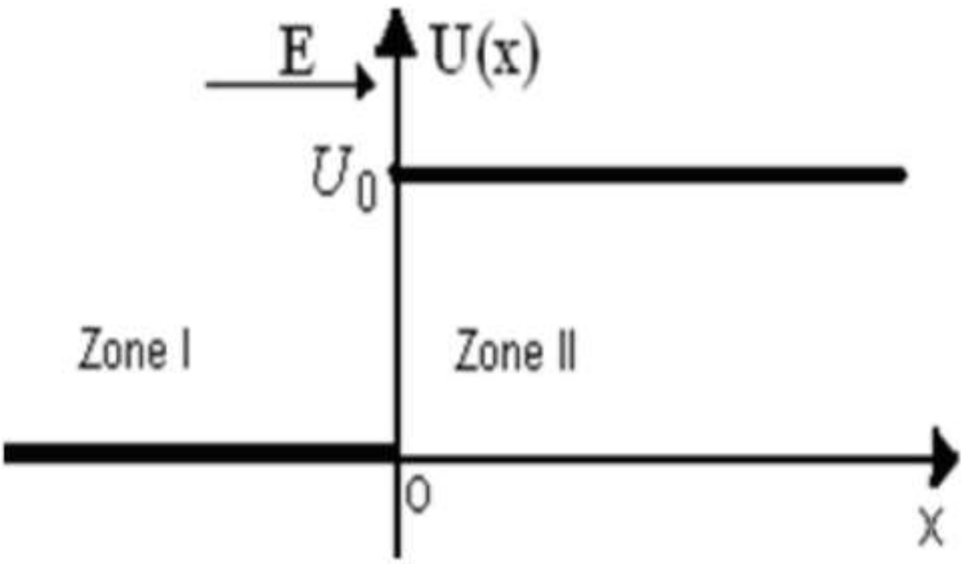
$V_a\,(kV)$	1	10	10^2	10^3	10^4
$\lambda_{DB}\,(pm)$	$38{,}8$	$12{,}2$	$3{,}70$	$0{,}87$	$0{,}12$

(1pt)

Conclusion : λ_{DB} est très faible devant les dimensions du canon, donc la mécanique classique s'applique. **(1pt)**

Exercice 2 (12pts)

1. Résolvons l'équation de Schrödinger en donnant les parties spatiale et temporelle et l'expression complète de la fonction d'onde $\Psi(x,t)$



D'après le schéma : $\boxed{E > U_0}$

L'équation de Schrödinger s'écrit : $-\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{\partial^2\phi(x)}{\partial x^2}+U(x)\phi(x)=E\phi(x)$

Zone	Valeur $U(x)$	Equation de Schrödinger	Equation différentielle
(I) $x<0$	$U(x)=0$	$-\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{\partial^2\phi(x)}{\partial x^2}=E\phi(x)$	$\phi''(x)+\frac{2m}{\hbar^2}E\phi(x)=0$ **(0,5pt)**
(II) $x>0$	$U(x)=U_0$	$-\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{\partial^2\phi(x)}{\partial x^2}+U_0\phi(x)=E\phi(x)$	$\phi''(x)+\frac{2m}{\hbar^2}(E-U_0)\phi(x)=0$ **(0,5pt)**

Posons : $k^2=\frac{2m}{\hbar^2}E$ et $\lambda^2=\frac{2m}{\hbar^2}(E-U_0)$

Les résolutions des équations donnent :

Zone	Solution mathématique	Solution physique
(I) $x<0$	$\phi_I(x)=A\cdot\exp(i\cdot k\cdot x)+B\cdot\exp(-i\cdot k\cdot x)$	$\phi_I(x)=A\cdot\exp(i\cdot k\cdot x)+B\cdot\exp(-i\cdot k\cdot x)$ **(1pt)**
(II) $x>0$	$\phi_{II}(x)=C\cdot\exp(i\cdot\lambda\cdot x)+D\cdot\exp(-i\cdot\lambda\cdot x)$	$\phi_{II}(x)=C\cdot\exp(i\cdot\lambda\cdot x)$; $D=0$ car il n'y a pas d'onde réfléchie dans cette zone **(1pt)**

L'expression complète de la fonction d'onde :

- **Zone I :**

$$\Psi_I(x,t)=\phi_I(x)\cdot\sigma(t)\ \Rightarrow\ \boxed{\Psi_I(x,t)=\left[A\cdot\exp(i\cdot k\cdot x)+B\cdot\exp(-i\cdot k\cdot x)\right]\cdot\exp\left(-\frac{i\cdot E\cdot t}{\hbar}\right)}$$

(1pt)

Avec :

$\boxed{\phi_I(x)=A\cdot\exp(i\cdot k\cdot x)+B\cdot\exp(-i\cdot k\cdot x)}$: la partie spatiale

$\boxed{\sigma(t)=\exp\left(-\frac{i\cdot E\cdot t}{\hbar}\right)}$: la partie temporelle

- **Zone II :**

$$\Psi_{II}(x,t)=\phi_{II}(x)\cdot\sigma(t)\ \Rightarrow\ \boxed{\Psi_{II}(x,t)=C\cdot\exp(i\cdot\lambda\cdot x)\cdot\exp\left(-\frac{i\cdot E\cdot t}{\hbar}\right)}$$ **(1pt)**

Avec :

$\boxed{\phi_{II}(x)=C\cdot\exp(i\cdot\lambda\cdot x)}$: la partie spatiale ;

$\boxed{\sigma(t)=\exp\left(-\frac{i\cdot E\cdot t}{\hbar}\right)}$: la partie temporelle.

2. Calcul de la densité de flux de particule dans chaque zone

- **Zone I :**

$$j_I(x,t)=-\frac{i\hbar}{2m}\left[\bar{\Psi}_I(x,t)\frac{d\Psi_I(x,t)}{dx}-\Psi_I(x,t)\frac{d\bar{\Psi}_I(x,t)}{dx}\right]$$ (1pt)

$$\Psi_I(x,t)=\left[A\cdot\exp(i\cdot k\cdot x)+B\cdot\exp(-i\cdot k\cdot x)\right]\cdot\exp\left(-\frac{i\cdot E\cdot t}{\hbar}\right)$$

$$\bar{\Psi}_I(x,t)=\left[\bar{A}\cdot\exp(-i\cdot k\cdot x)+\bar{B}\cdot\exp(i\cdot k\cdot x)\right]\cdot\exp\left(\frac{i\cdot E\cdot t}{\hbar}\right)$$

$$\frac{d\Psi_I(x,t)}{dx}=i\cdot k\left[A\cdot\exp(i\cdot k\cdot x)-B\cdot\exp(-i\cdot k\cdot x)\right]\cdot\exp\left(-\frac{i\cdot E\cdot t}{\hbar}\right)$$

$$\frac{d\bar{\Psi}_I(x,t)}{dx}=i\cdot k\left[-\bar{A}\cdot\exp(-i\cdot k\cdot x)+\bar{B}\cdot\exp(i\cdot k\cdot x)\right]\cdot\exp\left(\frac{i\cdot E\cdot t}{\hbar}\right)$$

$$\bar{\Psi}_I(x,t)\frac{d\Psi_I(x,t)}{dx}=-i\cdot k\cdot A\cdot\bar{A}+i\cdot k\cdot A\cdot\bar{B}\exp(2i\cdot k\cdot x)-i\cdot k\cdot\bar{A}\cdot B\exp(-2i\cdot k\cdot x)+i\cdot k\cdot B\cdot\bar{B}$$

$$\Psi_I(x,t)\frac{d\bar{\Psi}_I(x,t)}{dx}=i\cdot k\cdot A\cdot\bar{A}-i\cdot k\cdot\bar{A}\cdot B\exp(-2i\cdot k\cdot x)+i\cdot k\cdot A\cdot\bar{B}\exp(2i\cdot k\cdot x)-i\cdot k\cdot B\cdot\bar{B}$$

$\Rightarrow$

$$j_I(x,t)=-\frac{i\hbar}{2m}\left[\begin{array}{l}-i\cdot k\cdot A\cdot\bar{A}+i\cdot k\cdot A\cdot\bar{B}\exp(2i\cdot k\cdot x)-i\cdot k\cdot\bar{A}\cdot B\exp(-2i\cdot k\cdot x)+i\cdot k\cdot B\cdot\bar{B}-\\ \{i\cdot k\cdot A\cdot\bar{A}-i\cdot k\cdot\bar{A}\cdot B\exp(-2i\cdot k\cdot x)+i\cdot k\cdot A\cdot\bar{B}\exp(2i\cdot k\cdot x)-i\cdot k\cdot B\cdot\bar{B}\}\end{array}\right]$$

$$\Rightarrow\quad j_I(x,t)=-\frac{i\hbar}{2m}\left[2i\cdot k\cdot\left(A\cdot\bar{A}-B\cdot\bar{B}\right)\right]\quad\Rightarrow\quad\boxed{j_I(x,t)=\frac{\hbar k}{m}\left(|A|^2-|B|^2\right)}$$ **(1pt)**

- **Zone II :**

$$j_{II}(x,t)=-\frac{i\hbar}{2m}\left[\bar{\Psi}_{II}(x,t)\frac{d\Psi_{II}(x,t)}{dx}-\Psi_{II}(x,t)\frac{d\bar{\Psi}_{II}(x,t)}{dx}\right]$$

$$\Psi_{II}(x,t)=C\cdot\exp(i\cdot\lambda\cdot x)\cdot\exp\left(-\frac{i\cdot E\cdot t}{\hbar}\right)$$

$$\bar{\Psi}_{II}(x,t)=\bar{C}\cdot\exp(-i\cdot\lambda\cdot x)\cdot\exp\left(\frac{i\cdot E\cdot t}{\hbar}\right)$$

$$\frac{d\Psi_{II}(x,t)}{dx}=i\cdot\lambda\cdot C\cdot\exp(i\cdot\lambda\cdot x)\cdot\exp\left(-\frac{i\cdot E\cdot t}{\hbar}\right)$$

$$\frac{d\bar{\Psi}_{II}(x,t)}{dx}=-i\cdot\lambda\cdot\bar{C}\cdot\exp(-i\cdot\lambda\cdot x)\cdot\exp\left(\frac{i\cdot E\cdot t}{\hbar}\right)$$

$$\bar{\Psi}_{II}(x,t)\frac{d\Psi_{II}(x,t)}{dx}=i\cdot\lambda\cdot C\cdot\bar{C}$$

$$\Psi_{II}(x,t)\frac{d\bar{\Psi}_{II}(x,t)}{dx}=-i\cdot\lambda\cdot C\cdot\bar{C}\;\Rightarrow\;j_{II}(x,t)=-\frac{i\hbar}{2m}\left[i\cdot\lambda\cdot C\cdot\bar{C}-\left(-i\cdot\lambda\cdot C\cdot\bar{C}\right)\right]$$

$$\Rightarrow\quad j_{II}(x,t)=-\frac{i\hbar}{2m}\left[2i\cdot\lambda\cdot C\cdot\bar{C}\right]\quad\Rightarrow\quad\boxed{j_{II}(x,t)=\frac{\hbar\lambda}{m}|C|^2}$$ **(1pt)**

3. Identification des densités des flux des particules

$j_{inc} = \frac{\hbar k}{m}|A|^2$: Flux incident **(0,5pt)**

$j_{réf} = \frac{\hbar k}{m}|B|^2$: Flux réfléchi **(0,5pt)**

$j_{trans} = \frac{\hbar \lambda}{m}|C|^2$: Flux transmis **(0,5pt)**

4. Calcul des coefficients de réflexion (R) et de transmission (T)

$$R = \frac{j_{réf}}{j_{inc}} = \frac{\frac{\hbar k}{m}|B|^2}{\frac{\hbar k}{m}|A|^2} = \left|\frac{B}{A}\right|^2 \quad \Rightarrow \quad R = \left|\frac{B}{A}\right|^2$$ **(1pt)**

$$T = \frac{j_{trans}}{j_{inc}} = \frac{\frac{\hbar \lambda}{m}|C|^2}{\frac{\hbar k}{m}|A|^2} = \frac{\lambda}{k}\left|\frac{C}{A}\right|^2 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{\lambda}{k}\left|\frac{C}{A}\right|^2$$ **(1pt)**

Appliquons les conditions de continuité des fonctions d'ondes et de leurs dérivées premières en $x = 0$:

$$\begin{cases} \phi_I(0) = \phi_{II}(0) \\ \phi_I'(0) = \phi_{II}'(0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + B = C \\ i \cdot k \cdot A - i \cdot k \cdot B = i \cdot \lambda \cdot C \end{cases}$$

Donc en remplaçant C par son expression dans la deuxième équation du système, nous avons :

$$i \cdot k \cdot A - i \cdot k \cdot B = i \cdot \lambda \cdot (A + B) \quad \Rightarrow \quad B = A\frac{k-\lambda}{k+\lambda} \qquad \text{; D'où : } C = A\left(1 + \frac{k-\lambda}{k+\lambda}\right)$$

Alors : $$T = \frac{\lambda}{k}\left|\frac{C}{A}\right|^2 = \frac{\lambda}{k}\left|\frac{A\left(1+\frac{k-\lambda}{k+\lambda}\right)}{A}\right|^2 = \frac{\lambda}{k}\left|\frac{(k+\lambda+k-\lambda)}{k+\lambda}\right|^2 = \frac{\lambda}{k}\left(\frac{2k}{k+\lambda}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad T = \frac{\lambda}{k}\frac{4k^2}{(k+\lambda)^2} = \frac{4\lambda k}{(k+\lambda)^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = \frac{4\lambda k}{(k+\lambda)^2}}$$ **(0,5pt)**

Pour Calculer R, on a :

$$i \cdot k \cdot A - i \cdot k \cdot B = i \cdot \lambda \cdot (A + B) \quad \Rightarrow \quad (k-\lambda)A = (k+\lambda)B \quad \Rightarrow \quad \frac{B}{A} = \frac{k-\lambda}{k+\lambda}$$

$$\Rightarrow \; R = \left|\frac{B}{A}\right|^2 \; \Rightarrow \; \boxed{R = \left(\frac{k-\lambda}{k+\lambda}\right)^2}$$ **(0,5pt)**

5. Conclusion

Vérifions d'abord $R+T$:

$$R+T = \left(\frac{k-\lambda}{k+\lambda}\right)^2 + \frac{4\lambda k}{(k+\lambda)^2} = \frac{(k-\lambda)^2 + 4\lambda k}{(k+\lambda)^2} \qquad \Rightarrow \quad R+T = \frac{k^2 - 2k\lambda + \lambda^2 + 4\lambda k}{k^2 + 2k\lambda + \lambda^2}$$

$\Rightarrow R+T = \dfrac{k^2 + 2k\lambda + \lambda^2}{k^2 + 2k\lambda + \lambda^2} = 1$; D'où : $\boxed{R+T=1}$ **(0,5pt)**