UNIVERSITÉ ALIOUNE DIOP DE BAMBEY
UFR SATIC
DEPT. DE PHYSIQUE

EXAMEN DE MECANIQUE QUANTIQUE 2022-2023 - SESSION NORMALE

EXAMINATEUR : Professeur Senghane MBODJI, Docteur Bertrand Tchanche FANKAM, Docteur Serigne Ndiangue LEYE & Docteur Assane DIOUF

NIVEAU : L2

Exercice 1 : 10pts

1) Montrons que $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}$ **;** $m = m(V)$

On sait que si une particule est relativiste, son énergie s'écrit : $E^2 = p^2c^2 + E_0^2 = \left(mc^2\right)^2$; $p = mV$, sa quantité de mouvement et $E_0 = m_0c^2$, son énergie au repos.

On a : $(mV)^2 c^2 + \left(m_0c^2\right)^2 = m^2\left(c^2\right)^2$

On simplifie : $(mV)^2 + (m_0)^2 c^2 = m^2c^2 \quad \Rightarrow m^2\left(c^2 - V^2\right) = m_0^2c^2$

$$\Rightarrow m^2 = \frac{m_0^2c^2}{c^2 - V^2} = \frac{m_0^2}{\frac{1}{c^2}\left(c^2 - V^2\right)} = \frac{m_0^2}{1 - \frac{V^2}{c^2}} \qquad \Rightarrow \boxed{m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}}$$ **1pt**

m : masse de la particule en mouvement

m_0 : masse de la particule au repos

2.1) Montrons que $m = \gamma m_0$

On sait que $\gamma = \dfrac{E}{E_0} = \dfrac{m.c^2}{m_0.c^2} = \dfrac{m}{m_0} \quad \Rightarrow \boxed{m = \gamma m_0}$ **1pt**

2.2) Ecrivons γ en fonction β défini par $\beta = V/c$

$$m = \gamma m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad \Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad \Rightarrow \boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}}$$ **1pt**

3) Déterminons la relation de dispersion $\omega = \omega(k)$; k, vecteur d'onde

Comme on a une particule relativiste, nous avons :

$E^2 = p^2c^2 + \left(m_0c^2\right)^2$; $p = \hbar \cdot k$ et $E = \hbar \cdot \omega$ $\Rightarrow \hbar^2 \cdot \omega^2 = \hbar^2 \cdot k^2 \cdot c^2 + \left(m_0c^2\right)^2$

$$\Rightarrow \omega^2 = k^2 \cdot c^2 + \frac{\left(m_0c^2\right)^2}{\hbar^2} \Rightarrow \boxed{\omega(k) = \sqrt{k^2 \cdot c^2 + \frac{\left(m_0c^2\right)^2}{\hbar^2}}}$$ **1pt**

4.1) Définissons la vitesse de phase, V_ϕ

$$\boxed{V_\phi = \frac{\omega}{k}}$$ **1pt**

4.2) Signification physique de V_ϕ

C'est la vitesse de propagation de l'onde. Elle est identique à la vitesse des plans équiphases de l'onde. **1pt**

4.3) Expressions de V_ϕ

$$V_\phi = \frac{\omega}{k} \Rightarrow V_\phi = \frac{\sqrt{k^2 \cdot c^2 + \frac{\left(m_0c^2\right)^2}{\hbar^2}}}{k} = \sqrt{c^2 + \left(\frac{m_0c^2}{\hbar k}\right)^2} \Rightarrow \boxed{V_\phi = \sqrt{c^2 + \left(\frac{m_0c^2}{\hbar k}\right)^2}}$$ **1pt**

5.1) Définissions de la vitesse de groupe, V_g

$$\boxed{V_g = \frac{d\omega}{dk}}$$ **1pt**

5.2) Signification physique de V_g

Elle s'identifie à la vitesse de la particule à laquelle est associée le paquet d'onde. **1pt**

5.3) Expression de V_g

$$V_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}\left(\sqrt{k^2 \cdot c^2 + \frac{\left(m_0c^2\right)^2}{\hbar^2}}\right) \Rightarrow V_g = \frac{2k \cdot c^2}{2\sqrt{k^2 \cdot c^2 + \frac{\left(m_0c^2\right)^2}{\hbar^2}}}$$

$$\Rightarrow V_g = \frac{kc^2}{\sqrt{k^2c^2\left[1 + \frac{\left(m_0c^2\right)^2}{\hbar^2} \times \frac{1}{k^2c^2}\right]}} = \frac{kc^2}{kc\sqrt{1 + \left(\frac{m_0c}{\hbar k}\right)^2}} \Rightarrow \boxed{V_g = \frac{c}{\sqrt{1 + \left(\frac{m_0c}{\hbar k}\right)^2}}}$$ **1pt**

<u>Exercice 2</u> : 5pts

1.1.1) Déterminons la vitesse de phase, V_ϕ

$$V_\phi = \frac{\omega}{k} \Rightarrow V_\phi = \frac{\hbar\omega}{\hbar k} = \frac{E}{p} = \frac{mc^2}{mV} \Rightarrow V_\phi = \frac{c^2}{V}$$; or $V = 0,5c$

$$\Rightarrow V_\phi = \frac{c^2}{0,5c} = \frac{c}{0,5} \Rightarrow \boxed{V_\phi = 2c}$$ **0,5pt**

1.1.2) Déterminons la vitesse de groupe, V_g

$$V_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{dE}{dp} \Rightarrow V_g = \frac{d}{dp}\left(\sqrt{p^2c^2 + E_0^2}\right) = \frac{2pc^2}{2\sqrt{p^2c^2 + E_0^2}} \Rightarrow V_g = \frac{pc^2}{E} = \frac{mVc^2}{mc^2}$$

$$\Rightarrow V_g = V = \frac{c}{2} \Rightarrow \boxed{V_g = \frac{c}{2}}$$ **0,5pt**

1.2.1) Déterminons le facteur relativiste, γ

$$\gamma = \frac{E}{E_0} = \frac{mc^2}{m_0c^2} \Rightarrow m = \gamma m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \Rightarrow \boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}}$$ **0,5pt**

1.2.2) Calculons le facteur relativiste, γ

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{(0,5c)^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}} \Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow \boxed{\gamma = \frac{2}{\sqrt{3}}}$$ **0,5pt**

1.3) Expression de la longueur de De Broglie, λ_{DB}

$$\lambda_{DB} = \frac{h}{p} = \frac{h}{mV} = \frac{h}{\gamma m_0 V} \; ; \; \beta = V/c \Rightarrow V = \beta c$$

$$\Rightarrow \lambda_{DB} = \frac{h}{\gamma m_0 \beta c} \Rightarrow \lambda_{DB} = \frac{h/m_0c}{\gamma\beta} \Rightarrow \boxed{\lambda_{DB} = \frac{\lambda_c}{\gamma\beta}}$$ **1pt**

1.4) Montrons que $\lambda_{DB} = \frac{\lambda_c}{(\gamma^2-1)^{1/2}}$

Nous savons que $\gamma^2 = \frac{1}{1-\beta^2} \Rightarrow \gamma^2 - (\gamma\beta)^2 = 1 \Rightarrow \gamma^2 - 1 = (\gamma\beta)^2 \Rightarrow \gamma\beta = (\gamma^2-1)^{1/2}$

Or $\lambda_{DB} = \frac{\lambda_c}{\gamma\beta} \Rightarrow \boxed{\lambda_{DB} = \frac{\lambda_c}{\left(\gamma^2 - 1\right)^{1/2}}}$ **1pt**

1.5) Calculons λ_{DB}

$$\lambda_{DB} = \frac{\lambda_c}{\left(\gamma^2 - 1\right)^{1/2}}$$

A.N : $\lambda_{DB} = \frac{2,46.10^{-12}}{\left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 - 1\right)^{1/2}} = 4,20.10^{-12}\,m \Rightarrow \boxed{\lambda_{DB} = 4,20\,pm}$ **1pt**

Exercice 3 : 5pts

1) Expression de l'énergie de la particule

1.1) Approximation newtonienne :

$\begin{cases} m = m_0 \\ E = E_k + E_0 \end{cases}$; E_k est l'énergie cinétique

$$\boxed{E = \hbar\omega = \frac{p^2}{2m} + E_0}$$ **1pt**

1.2) Approximation einsteinienne :

$\hbar\omega = \sqrt{p^2c^2 + E_0^2} \Rightarrow \boxed{\hbar\omega = \sqrt{(\hbar kc)^2 + E_0^2}}$ **1pt**

1.3) Approximation ultraeinsteinienne : $E_0 \ll E = pc$

$\boxed{\hbar\omega = E = pc}$ **1pt**

2) Etablissons l'équation de la conservation de la probabilité

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + U\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} \quad (1)$$

$$\Psi^* \times (1) \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\Psi^*\Delta\Psi + \Psi^*U\Psi = i\hbar\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial t} \quad (2)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi^* + U\Psi^* = -i\hbar\frac{\partial\Psi^*}{\partial t} \quad (3)$$

$$\Psi \times (3) \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\Psi\Delta\Psi^* + \Psi U\Psi^* = -i\hbar\Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial t} \quad (4)$$

(2) - (4) : $-\frac{\hbar^2}{2m}\Psi^*\Delta\Psi+\frac{\hbar^2}{2m}\Psi\Delta\Psi^*=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left(\Psi\Psi^*\right)$

$\Rightarrow\ -\frac{i\hbar}{2m}\Psi^*\Delta\Psi+\frac{i\hbar}{2m}\Psi\Delta\Psi^*+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0\ ;\ \ \rho=\Psi\Psi^*=\left\|\Psi\right\|^2=\frac{dP}{dV}$: Densité de probabilité de présence de la particule

$\Rightarrow\ \vec{\nabla}\left[-\frac{i\hbar}{2m}\left(\Psi^*\vec{\nabla}\Psi-\Psi\vec{\nabla}\Psi^*\right)\right]+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0 \qquad \Rightarrow\ \vec{\nabla}\left[\frac{i\hbar}{2m}\left(\Psi\vec{\nabla}\Psi^*-\Psi^*\vec{\nabla}\Psi\right)\right]+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$

$\Rightarrow\ \boxed{\vec{\nabla}\vec{j}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0}$ **2pts**

Avec : $\vec{j}=\frac{i\hbar}{2m}\left(\Psi\vec{\nabla}\Psi^*-\Psi^*\vec{\nabla}\Psi\right)$: Vecteur densité de courant de particule