UNIVERSITÉ ALIOUNE DIOP DE BAMBEY
UFR SATIC
DEPT. DE PHYSIQUE

MECANIQUE QUANTIQUE

Prof. Senghane MBODJI, Docteur Bertrand Tchanche, Docteur Serigne Ndiangue LEYE

SERIE N°2 NIVEAU : L2 ANNEE 2022-2023

Exercice 1.

1.1. Rappeler l'hypothèse de la dualité onde-corpuscule postulée par Louis de Broglie et préciser l'expression de la longueur d'onde de de Broglie, λ_{DB}.

1.2. Exprimer λ_{DB} en fonction de l'énergie cinétique de la particule à laquelle est associée l'onde de Louis de Broglie à l'aide de l'analyse einsteinienne et des l'approximations newtonienne et ultra einsteinienne.

1.3. Donner un ou des exemples d'applications de l'onde de Louis de Broglie.

2. Soit un paquet d'onde associée à une particule :

$$\Psi(\vec{r};t)=\int \Psi_k(\vec{r};t)\cdot dk \qquad \Psi_k(\vec{r};t)=a(k)\cdot \exp\left[i\cdot(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega(k)\cdot t)\right]$$

2.1. Etablir la relation de dispersion pour une particule relativiste.

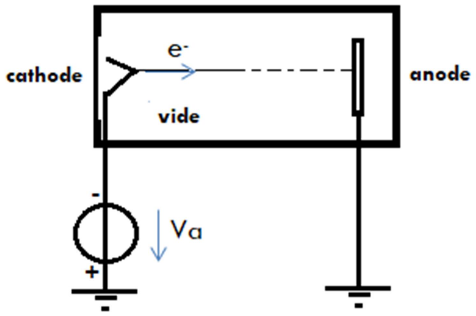
2.2. Définir la vitesse de phase $V\phi$ de l'onde et la vitesse de groupe V_g.

2.3. Préciser les significations physiques de V_g et $V\phi$

2.4. Etablir les vitesses de groupe V_g et de phase $V\phi$ dans l'approximation newtonienne et ultraeinsteinienne.

Exercice 2.

On considère des électrons rapides issus du canon d'un microscope électronique à haute tension d'accélération Va, où les électrons sont émis, sans vitesse par une cathode portée au potentiel négatif –Va par rapport à l'anode au potentiel de référence.



1. Déterminer en considérant l'analyse einteinienne en fonction du facteur relativiste, γ, et de la longueur d'onde Compton, λ_C, l'expression de la longueur d'onde de Broglie, λ_{DB}.
2. Calculer l'énergie cinétique E_k des électrons en utilisant la conservation de l'énergie mécanique
3. Compléter le tableau ci-dessous pour plusieurs valeurs de la tension d'accélération Va et conclure.

V_a(kV)	1	10	10^2	10^3	10^4

λ_{DB}(pm)					

Solutions

Exercice 1

1.1. Rappelons l'hypothèse de la dualité onde-corpuscule postulée par Louis De Broglie :

En 1923, Louis De Broglie généralisa la dualité onde-corpusculaire. En effet, il associa à chaque particule, d'énergie E et de quantité de mouvement $\vec{p}$, une onde, de vecteur $\vec{k}$ et de pulsation ω, liées respectivement par :

$\vec{p} = \hbar \cdot \vec{k}$, $p = \hbar \cdot k$ et $E = \hbar \cdot \omega$

Précisons l'expression de la longueur d'onde de de Broglie, λ_{DB}

D'après Louis De Broglie, on a : $\lambda_{DB} = \dfrac{h}{p}$

1.2. Exprimons λ_{DB} en fonction de l'énergie cinétique, E_k, de la particule à laquelle est associée l'onde de Louis De Broglie à l'aide de l'analyse einsteinienne , des approximations newtonienne et ultra einsteinienne

- Limite ultraeinsteinienne : $E >> m_0c^2 \Rightarrow$ $E^2 = p^2c^2 + \left(m_0c^2\right)^2 = p^2c^2$ $\Rightarrow E = pc$; E= E_k=pc

  $\Rightarrow E = \dfrac{hc}{\lambda_{DB}} \quad \Rightarrow \lambda_{DB} = \dfrac{hc}{E}$; E=E_k
- Analyse einsteinienne :

$$\begin{cases} E^2 = p^2c^2 + \left(m_0c^2\right)^2 \\ E = E_k + m_0c^2 \end{cases} \Rightarrow \left(E_k + m_0c^2\right)^2 = p^2c^2 + \left(m_0c^2\right)^2 \;;$$

E_k est l'énergie cinétique de la particule.

$$\Rightarrow E_k^2 + 2E_k\left(m_0c^2\right) + \left(m_0c^2\right)^2 = p^2c^2 + \left(m_0c^2\right)^2 \quad \Rightarrow \quad E_k^2 + 2E_k\left(m_0c^2\right) = p^2c^2$$

$$\Rightarrow p = \frac{\sqrt{E_k\left[E_k + 2\left(m_0c^2\right)\right]}}{c}$$

On sait que : $\lambda_{DB} = \frac{h}{p}$; $\Rightarrow \quad \lambda_{DB} = \frac{hc}{\sqrt{E_k\left[E_k + 2\left(m_0c^2\right)\right]}}$

- Approximations newtonienne: $\Rightarrow m_0 \cong m_0$

$$\Rightarrow \begin{cases} p = m_0 \cdot v \\ E_k = \frac{1}{2} m_0 \cdot v^2 \end{cases} \Rightarrow \quad p^2 = 2m_0 \cdot E_k \quad \Rightarrow \quad p = \sqrt{2m_0 \cdot E_k}$$

Comme $\lambda_{DB} = \frac{h}{p}$; alors on a : $\lambda_{DB} = \frac{h}{\sqrt{2m_0 \cdot E_k}}$

1.3. Donnons un ou des exemples d'applications de l'onde de Louis De Broglie

L'onde de Louis De Broglie s'applique dans la microscopie électronique qui comporte la:

- microscopie électronique de transmission (MET) ;
- microscopie électronique à balayage (MEB) ;
- microscopie électronique par réflexion (MER) ;
- microscopie électronique à balayage en transmission (MEBT).

2.1. Établissons la relation de dispersion pour une particule relativiste

Particule relativiste : $V > \frac{c}{10}$ et donc $m(V) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$

$E^2 = p^2c^2 + \left(m_0c^2\right)^2$; $p = \hbar \cdot k$ et $E = \hbar \cdot \omega$

$$\Rightarrow \hbar^2 \cdot \omega^2 = \hbar^2 \cdot k^2 \cdot c^2 + \left(m_0c^2\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = k^2 \cdot c^2 + \frac{\left(m_0c^2\right)^2}{\hbar^2} \quad \Rightarrow \quad \omega(k) = \sqrt{k^2 \cdot c^2 + \frac{\left(m_0c^2\right)^2}{\hbar^2}}$$

2.2. Définissons la vitesse de phase V_φ de l'onde et la vitesse de groupe V_g

- **Définissons la vitesse de phase V_φ :**

$$V_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{\sqrt{k^2 \cdot c^2 + \left(\frac{m_0c^2}{\hbar}\right)^2}}{k} \quad \Rightarrow \quad V_\varphi = \sqrt{c^2 + \left(\frac{m_0c^2}{k \cdot \hbar}\right)^2} \Rightarrow V_\varphi = \sqrt{c^2 + \left(\frac{m_0c^2}{\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{h}{2\pi}}\right)^2}$$

$$\Rightarrow V_\varphi = \sqrt{c^2 + \left(\frac{\lambda \cdot m_0 \cdot c^2}{h}\right)^2}$$

- **Définissons la vitesse de phase V_g :**

$$V_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}\left(\sqrt{k^2 \cdot c^2 + \frac{\left(m_0 c^2\right)^2}{\hbar^2}}\right) \Rightarrow V_g = \frac{2k \cdot c^2}{2\sqrt{k^2 \cdot c^2 + \frac{\left(m_0 c^2\right)^2}{\hbar^2}}}$$

$$\Rightarrow V_g = \frac{k \cdot c^2}{\sqrt{k^2 \cdot c^2 \left[1 + \frac{\left(m_0 c^2\right)^2}{\hbar^2} \times \frac{1}{k^2 \cdot c^2}\right]}} = \frac{k \cdot c^2}{k \cdot c \sqrt{1 + \left(\frac{m_0 \cdot c}{k \cdot \hbar}\right)^2}} \Rightarrow V_g = \frac{c}{\sqrt{1 + \left(\frac{m_0 \cdot c}{k \cdot \hbar}\right)^2}}$$

$$\Rightarrow V_g = \frac{c}{\sqrt{1 + \left(\frac{m_0 \cdot c}{\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{h}{2\pi}}\right)^2}} \Rightarrow V_g = \frac{c}{\sqrt{1 + \left(\frac{\lambda \cdot m_0 \cdot c}{h}\right)^2}}$$

2.3. Précisons les significations physiques de V_φ et V_g

V_φ : Vitesse de propagation de l'onde. Elle est identique à la vitesse des plans équiphases de l'onde.

V_g : Elle s'identifie à la vitesse de la particule à laquelle est associé le paquet d'onde.

2.4. Etablissons les vitesses de groupe V_g et de phase V_φ dans l'approximation newtonienne et ultraeinsteinienne

Approximation newtonienne :

L'énergie cinétique E_k est faible devant $m_0 \cdot c^2$ et $m \cong m_0$

$$E = E_k + m_0 \cdot c^2 = \frac{1}{2}\frac{p^2}{m_0} + m_0 \cdot c^2 \Rightarrow \hbar \cdot \omega = \frac{1}{2}\frac{\hbar^2 \cdot k^2}{m_0} + m_0 \cdot c^2 \Rightarrow \omega(k) = \frac{1}{2}\frac{\hbar \cdot k^2}{m_0} + \frac{m_0 \cdot c^2}{\hbar}$$

- $V_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{2}\frac{\hbar \cdot k}{m_0} + \frac{m_0 \cdot c^2}{\hbar \cdot k}$
- $V_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}\left(\frac{1}{2}\frac{\hbar \cdot k^2}{m_0} + \frac{m_0 \cdot c^2}{\hbar}\right) = \frac{\hbar \cdot k}{m_0} \Rightarrow V_g = \frac{\hbar \cdot k}{m_0}$

Approximation ultraeinsteinienne : E_k négligeable devant $m_0 \cdot c^2$

$$\begin{cases} E = E_k + m_0 \cdot c^2 \\ E^2 = p^2 \cdot c^2 + \left(m_0 \cdot c^2\right)^2 \cong p^2 \cdot c^2 \end{cases} \Rightarrow E = p \cdot c \quad \Rightarrow \hbar \cdot \omega = \hbar \cdot k \cdot c$$

$$\Rightarrow \omega = k \cdot c$$

- $V_\varphi = \dfrac{\omega}{k} = c$
- $V_g = \dfrac{d\omega}{dk} = c$.

Exercice 2

1. Déterminons sur la base de l'analyse einsteinienne l'expression de la longueur d'onde de Broglie, λ_{DB} en fonction du facteur relativiste, γ et de la longueur d'onde Compton, λ_C .

D'après Louis De Broglie, on a : $\lambda_{DB} = \dfrac{h}{p}$

D'après l'analyse einsteinienne : $\begin{cases} E^2 = p^2c^2 + \left(m_0c^2\right)^2 \\ E = E_k + m_0c^2 \end{cases}$

p : quantité de mouvement de l'électron ;

E : énergie totale d'un électron ;

E_k : énergie cinétique d'un électron ;

m_0 : masse au repos de l'électron ;

c : célérité de la lumière dans le vide

$$E^2 = p^2c^2 + \left(m_0c^2\right)^2 \quad \Rightarrow \quad p^2c^2 = E^2 - \left(m_0c^2\right)^2 \quad \Rightarrow \quad p = \frac{\sqrt{E^2 - \left(m_0c^2\right)^2}}{c}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_{DB} = \frac{hc}{\sqrt{E^2 - \left(m_0c^2\right)^2}} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_{DB} = \frac{hc}{\sqrt{\left(m_0c^2\right)^2\left[\left(\frac{E}{m_0c^2}\right)^2 - 1\right]}} \qquad \Rightarrow$$

$$\lambda_{DB} = \frac{h/m_0c}{\sqrt{\left[\left(\frac{E}{m_0c^2}\right)^2 - 1\right]}}$$

On sait que $\gamma = \frac{E}{m_0c^2} = \frac{E}{E_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$;

Avec : $E_0 = m_0c^2$: énergie au repos de l'électron

$$\Rightarrow \lambda_{DB} = \frac{h/m_0c}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} = \frac{\lambda_C}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} \qquad \Rightarrow \lambda_{DB} = \frac{\lambda_C}{\sqrt{\gamma^2 - 1}}$$

2. Calculons l'énergie cinétique E_k des électrons en utilisant la conservation de l'énergie mécanique

D'après la conservation de l'énergie mécanique, on a : $E_{c_i} + E_{p_i} = E_{c_f} + E_{p_f}$

$\Rightarrow E_{c_i} = 0$; $E_{p_i} = (-e)(-V_a)$; $E_{c_f} = E_k$ et $E_{p_f} = 0$

$$\Rightarrow 0 + (-e)(-V_a) = E_k + 0 \qquad \Rightarrow E_k = eV_a$$

3. Complétons le tableau ci-dessous pour plusieurs valeurs de la tension d'accélération V_a

Nous savons que : $\lambda_{DB} = \frac{\lambda_C}{\sqrt{\gamma^2 - 1}}$

$$\gamma = \frac{E}{E_0} = \frac{E_k + E_0}{E_0} = \frac{E_k}{E_0} + 1 \qquad \Rightarrow \gamma = \frac{eV_a}{m_0c^2} + 1 \qquad \Rightarrow \gamma^2 = \left(\frac{eV_a}{m_0c^2}\right)^2 + 2\left(\frac{eV_a}{m_0c^2}\right) + 1$$

$$\Rightarrow \gamma^2 - 1 = \left(\frac{eV_a}{m_0c^2}\right)^2 + 2\left(\frac{eV_a}{m_0c^2}\right) \qquad \Rightarrow \lambda_{DB} = \frac{\lambda_C}{\sqrt{\left(\frac{eV_a}{m_0c^2}\right)^2 + 2\left(\frac{eV_a}{m_0c^2}\right)}} \ ; \ \lambda_C = \frac{h}{m_0c}$$

$$\Rightarrow \lambda_{DB} = \frac{\dfrac{h}{m_0 c}}{\sqrt{\left(\dfrac{eV_a}{m_0 c^2}\right)^2 \left[1 + 2\left(\dfrac{m_0 c^2}{eV_a}\right)\right]}} \quad \Rightarrow \lambda_{DB} = \frac{hc}{eV_a \sqrt{1 + 2\left(\dfrac{m_0 c^2}{eV_a}\right)}}$$

$V_a(kV)$	1	10	10^2	10^3	10^4
$\lambda_{DB}(pm)$	$38,8$	$12,2$	$3,70$	$0,87$	$0,12$

Conclusion : λ_{DB} est très faible devant les dimensions du canon, donc la mécanique classique s'applique.